СТРУКТУРНЫЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

В.Н. Коваль, Ю.В. Кук

Изучается структурный метод построения моделей сложных систем, основанный, как и МГУА, на индуктивном подходе. Основное внимание уделяется моделям, аргументы которых подвержены случайным возмущениям с известными корреляционными матрицами.

Введение

В статье рассматриваются сложные системы, функционирование которых определяется множеством параметров, подверженных случайным неконтролируемым возмущениям [1–3]. Целью данной статьи является изучение структурного метода построения оптимальной математической модели сложной системы. Этот метод учитывает воздействие случайных возмущений не только на целевые переменные, но и на их аргументы. Учет таких возмущений позволяет строить оптимальные модели, которые при увеличении числа наблюдений сходятся к истинным моделям. Метод ориентирован на круг задач, в которых имеется априорная информация о ковариационной функции шума, воздействующего на аргументы. Такого рода задачи встречаются в гидроакустике, радиолокации, навигации и в некоторых других областях науки и техники. Например, при построении модели движения объекта в воздушной среде следует учитывать воздействие на его параметры флуктуирующей составляющей ветра, которая имеет экспоненциальную ковариационную функцию. В гидроакустике ковариационную функцию моря также предварительно оценивают на основе экспериментальных данных. Для широкого круга задач, в которых отсутствует какая-либо априорная информация о статистических характеристиках случайных возмущений, воздействующих на аргументы, структурный метод следует применять с нулевой ковариационной матрицей, а в случае, когда известны лишь дисперсии ошибок измерений, ковариационная матрица имеет диагональный вид с дисперсиями ошибок по диагонали. Однако, как будет показано ниже, получаемые при таких условиях модели не будут соответствовать истинным зависимостям между переменными при воздействии случайных возмущений на аргументы модели.

Структурный метод основан на индуктивном подходе. В этом его сходство с методом группового учета аргументов - МГУА, классическим методом построения моделей, разработанным А.Г. Ивахненко [4–5] и его школой. Применение в МГУА полного перебора моделей, когда это возможно, или применение неполного перебора по методу [6], позволяет найти модель, которая обеспечивает глобальный экстремум внешнего критерия оптимальности.

В основу структурного метода положен подход, позволяющий избежать большого перебора моделей, основанный на следующем принципе: в модель данного порядка должны входить переменные, имеющие только *значимы*е значения частного коэффициента корреляции с целевой переменной, что значительно упрощает модель при сохранении ее корректности. Множество таких переменных получается с помощью аппарата бассейнов и имеет аналогию с эффективным множеством регрессоров в регрессионном анализе [7]. Из исходного принципа вытекает следующая особенность предлагаемого метода: перебор моделей в пределах множества полиномиальных моделей одного и того же порядка не производится: оптимальная модель данного порядка находится с помощью построения бассейна, а перебор осуществляется среди оптимальных моделей разных порядков, что позволяет резко сократить общий перебор всех моделей. Принцип отбора переменных, попадающих в бассейн, в структурном методе имеет аналогию с принципом включения переменных в шаговом регрессионном методе [7]. Однако, оба метода используют разные статистические критерии проверки значимости переменных, причем применение шагового метода требует построения промежуточных моделей с использованием метода наименьших квадратов (МНК), который принципиально не применим в структурном методе, поскольку строит модели, не соответствующие истинным зависимостям между переменными.

1. Структурная модель системы

Будем различать следующие типы переменных: входные $(x_1,...,x_N)$ и целевую переменную y. *Целевая* — это переменная, на которую передается воздействие от изменений входных переменных. Будем предполагать, что значения всех рассматриваемых переменных наблюдались в моменты времени $t = 1,...,n$.

Пусть ε, $\delta_1,...,\delta_N$ — случайные возмущения, воздействующие соответственно на целевую и входные переменные. В результате случайных возмущений наблюдаются не истинные значения переменных, а значения, отличающиеся от них на некоторую случайную величину. Будем обозначать истинные значения переменных со штрихом, наблюдаемые — без штриха. Тогда

$$y = y' + \varepsilon \ , \ x_1 = x_1' + \delta_1,..., x_N = x_N' + \delta_N \ . \qquad (1)$$

Задача состоит в построении по таблице экспериментальных данных о наблюдаемых значениях целевой и входных переменных математической модели системы, которая бы учитывала искажающее воздействие случайных возмущений на эти переменные. Введем понятие структурной модели системы. Пусть связь между истинными значениями переменных функциональна и имеет вид:

$$y' = f\,(x_1',...,x_N')\ . \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что связь между наблюдаемыми их значениями может быть представлена в виде

$$y = f\,(x_1 - \delta_1,..., x_N - \delta_N) + \varepsilon\ . \qquad (3)$$

Уравнения (3) называются *структурными соотношениями* между наблюдаемыми переменными, порождаемыми функциональными соотношениями (2) между истинными переменными. Связь между наблюдаемыми переменными называется *структурной*, в отличие от функциональной связи (2). Понятие структурной связи было введено Нейманом и Скоттом в [8].

Чаще всего функции f в (2) неизвестны. Поэтому ищется их аппроксимация с помощью каких-нибудь простых математических функций. Под *моделью* системы будем понимать систему соотношений

$$y' = F\,(x_1',...,x_N'),$$

где $F(x_1',...,x_N')$ — аппроксимация неизвестной функции $f(x_1',...,x_N')$.

Построение модели сложной системы осуществляется с помощью предлагаемого нами метода, названного *структурным*. Ограничимся рассмотрением полиномиальных моделей. В *полиномиальной структурной модели* *k*-го порядка $F(x_1',...,x_N')$ представляет собой отрезок ряда Тейлора до производных *k*+1-го порядка. Любую полиномиальную модель можно представить в виде линейной модели:

$$y' = b_{i0} + \sum_{j=1}^{L_k} b_j z_j\,, \tag{4}$$

где L_k — равно числу всех членов аппроксимирующего отрезка ряда Тейлора, содержащих переменные, z_j обозначает переменную, либо произведение переменных, для j-го такого члена, а b_j — соответствующий коэффициент [2]. Таким образом, изучение полиномиальных моделей сводится к изучению линейных моделей (4).

2. Бассейны переменных

В отличие от МГУА [4–5], в котором переменные модели находятся многорядной селекцией, или при малом их числе — полным перебором, множество переменных, входящих в структурную модель находится с помощью *бассейнов*.

Бассейн для некоторой целевой переменной представляет собой множество переменных, которые имеют значимую связь с рассматриваемой целевой переменной. Для измерения связи между переменными будем использовать *частные коэффициенты корреляции*, которые измеряют статистическую связь между переменными, «очищенную» от опосредованного влияния других переменных. Под *значимостью* этой связи будем понимать значимость (с вероятностью ошибки α) значения частного коэффициента корреляции между ними [9].

Определение 1. *Наилучшим* множеством переменных для некоторой целевой переменной y понимается множество переменных, обладающих следующими свойствами: 1) *полнотой*: все переменные, имеющие с заданной вероятностью ошибки значимую связь с целевой переменной, входят в это множество; 2) *отсутствием избыточности*: переменные, имеющие с заданной вероятностью ошибки незначимую связь с целевой переменной, не входят в это множество.

Наилучшее множество для y находится путем построения бассейнов.

Определение 2. *Бассейном k-го порядка* для целевой переменной y назовем подмножество **B** входных и управляющих переменных, а также всевозможных их произведений (с числом сомножителей не более k+1), включающее все переменные, которые имеют значимый (относительно множества **B**) частный выборочный коэффициент корреляции с y.

Процедура построения бассейнов хорошо видна из рис.1. Она состоит из двух взаимосвязанных алгоритмов: 1) включения переменных в бассейн и 2) исключения переменных из бассейна. На рис.1 эти алгоритмы отделены пунктирной чертой.

3. Оптимальные структурные модели

Всегда существует бесконечное число функций, построенных по экспериментальным данным, которые можно взять в качестве модели для истинной зависимости между переменными. Поэтому возникает вопрос: как наилучшим образом использовать таблицу экспериментальных данных для получения в каком-то роде оптимальной модели и что под этим следует понимать. Введем следующее определение оптимальной структурной модели.

Определение 3. *Оптимальной структурной моделью* для y назовем модель, построенную из переменных наилучшего множества, для которой сумма квадратов отклонений функции $F(x'_1,...,x'_N)$ от истинной $f(x'_1,...,x'_N)$ минимальна по сравнению с другими моделями:

$$\begin{aligned}&\min_F \sum_{t=1}^{n}[f(x'_1(t),...,x'_N(t)) - F(x'_1(t),...,x'_N(t))]^2 = \\ &= \min_F \sum_{t=1}^{n}[y'(t) - F\ (x'_1(t),...,x'_N(t))]^2\end{aligned} \qquad (5)$$

Рассмотрим методику построения оптимальной *линейной* модели для некоторой целевой переменной y. Пусть в бассейн первого порядка для целевой переменной y вошли следующие входные переменные: $x_{j1}, x_{j2} ..., x_{jw}$, которые составляют наилучшее множество переменных. Без потери общности предположим, что случайные возмущения, воздействующие на целевую и входные переменные: ε и $\delta_1,...,\delta_N$ имеют нулевые матожидания: $M\varepsilon = 0$, и $M\delta_1 = 0,...,M\delta_N = 0$.

Пусть известна ковариационная матрица R случайных ошибок $\varepsilon, \delta_{j1}, \delta_{j2},...,\delta_{jw}$. Она имеет размерность $(1+w)\times(1+w)$.

$$R = \begin{pmatrix} \sigma^2(\varepsilon) & r(\varepsilon, \delta_{j1}) & ... & r(\varepsilon, \delta_{jw}) \\ r(\delta_{j1}, \varepsilon) & \sigma^2(\delta_{j1}) & ... & r(\delta_{j1}, \delta_{jw}) \\ ... & ... & ... & ... \\ r(\delta_{jw}, \varepsilon) & r(\delta_{jw}, \delta_{j1}) & ... & \sigma^2(\delta_{jw}) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

На диагонали этой матрицы стоят дисперсии ошибок.

Предположим, что истинная зависимость между целевой и входными переменными линейна и имеет вид:

$$y' = a_0 + a_1 x'_{j1} + a_2 x'_{j2} + \ldots + a_w x'_{jw} . \qquad (7)$$

Представим оптимальную линейную модель для y в виде:

$$y' = b_0 + b_1 x'_{j1} + b_2 x'_{j2} + \ldots + b_w x'_{jw} , \qquad (8)$$

Найдем выражения для коэффициентов этой модели, такие, чтобы выполнялось условие оптимальности модели. Для определения коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_w$ в регрессионных методах используется метод наименьших квадратов, при котором минимизируется

$$\sum_{t=1}^{n} \{y\ (t) - b_0 - b_1 x_{j1}(t) - \ldots - b_w x_{jw}(t)\}^2 \qquad (9)$$

В случае, когда входные переменные подвержены случайным ошибкам, применение этого метода приводит к ошибочным моделям по сравнению с истинными зависимостями между переменными.

Поэтому коэффициенты модели (8) определяются не путем решения системы нормальных уравнений, которая получается в результате минимизации вышеуказанной суммы квадратов (9), а путем решения системы уравнений, которая получается в результате минимизации суммы квадратов (5). Получаемую в этом случае систему уравнений назовем структурной системой. Для нахождения этой системы подставим (8) в (5):

$$\sum_{t=1}^{n} [y'(t) - (b_0 + b_1 x'_{j1}(t) + b_2 x'_{j2}(t) + \ldots + b_w x'_{jw}(t))]^2 \qquad (10).$$

Представим выражение в квадратных скобках через наблюдаемые переменные и ошибки по формулам (1). Получим

$$\sum_{t=1}^{n} [y\ (t) - (b_0 + b_1 x_{j1}(t) + b_2 x_{j2}(t) + \ldots + b_w x_{jw}(t) -$$
$$- b_1 \delta_{j1}(t) - b_2 \delta_{j2}(t) - \ldots - b_w \delta_{jw}(t) + \varepsilon(t))]^2 .$$

Так как коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_w$ доставляют минимум (5), то они удовлетворяют системе уравнений, получаемой из выражения (10) путем его дифференцирования по каждому из коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_w$ и приравниванию производных к нулю. В результате будет получена система уравнений, которая при $n \to \infty$ и преобразуется в структурную систему уравнений. Приведем ее окончательный вид, ограничившись лишь первым, вторым и последним уравнением структурной системы. Первое уравнение этой системы равно:

$$\bar{y}_i = b_0 + b_1 \bar{x}_{j1} + b_2 \bar{x}_{j2} + \ldots + b_w \bar{x}_{jw} , \qquad (11)$$

где $$\bar{y}\ = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} y\ (t), \quad \bar{x}_{j1} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} x_{j1}(t),\ \ldots,\ \bar{x}_{jw} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} x_{jw}(t).$$

Второе уравнение структурной системы имеет вид:

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_i(t)x_{j1}(t) - r(\varepsilon_i, \delta_{j1}) = b_0 + b_1\{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[x_{j1}(t)]^2 - r(\delta_{j1}, \delta_{j1})\} + \ldots$$

$$\ldots + b_w\{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{jw}(t)x_{j1}(t) - r(\delta_{jw}, \delta_{j1})\} \qquad (12)$$

И, наконец, последнее уравнение равно:

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y\ (t)x_{jw}(t) - r(\varepsilon_i, \delta_{jw}) = b_0 + b_1\{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{j1}(t)x_{jw}(t) - r(\delta_{j1}, \delta_{jw})\} + \ldots$$

$$\ldots + b_w\{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[x_{jw}(t)]^2 - r(\delta_{jv}, \gamma_{jw})\} \qquad (13)$$

Найдем решение структурной системы уравнений по правилу Крамера. Для этого построим матрицу D, каждая строчка которой состоит из выражений при неизвестных коэффициентах $b_0, b_1, ..., b_w$ соответствующего уравнения структурной системы (11)–(13):

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \bar{x}_{j1} & \ldots & \bar{u}_{jw} \\ 1 & \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[x_{j1}(t)]^2 - r(\delta_{j1}, \delta_{j1}) & \ldots & \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_{jw}(t)x_{j1}(t) - r(\gamma_{jw}, \delta_{j1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{j1}(t)u_{jw}(t) - r(\delta_{j1}, \gamma_{jw}) & \ldots & \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[u_{jw}(t)]^2 - r(\gamma_{jw}, \gamma_{jw}) \end{pmatrix}.$$

Построим матрицы D_l, $l = 0,1,...,v+w$, которые получаются из D путем замены в ней l-го столбца столбцом из свободных членов структурной системы, т.е. членов не содержащих $b_0, b_1, ..., b_w$.

$$D_l = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \bar{y}_i & \ldots & \bar{u}_{jw} \\ 1 & \ldots & \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_i(t)x_{j1}(t) - r(\varepsilon_i, \delta_{j1}) & \ldots & \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_{jw}(t)x_{j1}(t) - r(\gamma_{jw}, \delta_{j1}) \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_i(t)u_{jw}(t) - r(\varepsilon_i, \gamma_{jw}) & \ldots & \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[u_{jw}(t)]^2 - r(\gamma_{jw}, \gamma_{jw}) \end{pmatrix}$$

Искомые коэффициенты $b_0, b_1, ..., b_w$ оптимальной структурной модели определяются по формулам:

$$b_l = \frac{\det D_l}{\det D}, \ l = 0,1....,v+w. \qquad (14)$$

В силу (4) методика построения оптимальной *полилинейной* модели для некоторой целевой переменной y аналогична методике построения оптимальной линейной модели, но уже с использованием бассейнов k-го порядка для целевой переменной y и учетом не только ковариаций ошибок, но и их смешанных моментов более высокого порядка.

4. Сравнение различных моделей по их свойствам

Проведены исследования по изучению свойств оптимальных структурных линейных моделей и сравнение их со свойствами аналогичных моделей, получаемыми регрессионными методами с применением МНК. Оказалось, что, как долго бы система ни наблюдалась, истинная взаимосвязь параметров системы, искаженных случайными возмущениями, методами, основанными на нормальных уравнениях, вообще не может быть найдена. В то время как структурный метод способен воссоздать истинную картину зависимостей параметров системы. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть истинная связь между переменными системы имеет вид:*

$$y' = a_0 + a_1 x'_{j1} + a_2 x'_{j2} + \ldots + a_w x'_{jw}, \qquad (15)$$

Пусть ε, $\delta_{j1}, \delta_{j2}, \ldots, \delta_{jw}$ *— случайные возмущения, с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационной матрицей* R*, воздействуют соответственно на переменные* y, $x_{j1}, x_{j2} \ldots, x_{jw}$, *в моменты времени* $t_1, \ldots, t_n$. *Тогда при* $n \to \infty$ *оптимальная структурная модель*:

$$y' = b_0 + b_1 x'_{j1} + b_2 x'_{j2} + \ldots + b_w x'_{jw}$$

стремится к истинной зависимости (15).

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что при $n \to \infty$ коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_w$ сходятся к коэффициентам $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_w$.

Рассмотрим столбец, составленный из свободных членов структурной системы уравнений

$$G_l = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y(t) \\ \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y(t) x_{j1}(t) - r(\varepsilon, \delta_{j1}) \\ \ldots \\ \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y(t) x_{jw}(t) - r(\varepsilon, \delta_{jw}) \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Используя (1) и (15), преобразуем его к виду:

$$G_l = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y'(t) + \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \varepsilon(t) \\ \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y'(t) x'_{j1}(t) + \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y'(t)\delta_{j1}(t) + \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \varepsilon(t) x'_{j1}(t) + \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \varepsilon(t)\delta_{j1}(t) - r(\varepsilon, \delta_{j1}) \\ \ldots \\ \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y'(t) x'_{jw}(t) + \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y'(t)\delta_{jw}(t) + \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \varepsilon(t) x'_{jw}(t) + \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \varepsilon(t) x_{jw}(t) - r(\varepsilon, \delta_{jw}) \end{pmatrix}$$

Найдем выражение для G_l при $n \to \infty$. Так как при $n \to \infty$ усредненные суммы стремятся к своим математическим ожиданиям:

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon\ (t) \to 0, \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}y'(t)\delta_{j1}(t) \to 0, \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon\ (t)x'_{j1}(t) \to 0, ...$$

$$..., \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon\ (t)\delta_{j1}(t) \to r(\varepsilon\ ,\delta_{j1}),..., \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon\ (t)\delta_{jw}(t) \to r(\varepsilon,\delta_{jw}), \quad (17)$$

то при $n \to \infty$ G_l стремится к следующему выражению

$$G_l \to G_l^{\infty} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}y'(t) \\ \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}y'(t)x'_{j1}(t) \\ ... \\ \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}y'(t)x'_{jw}(t) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Заменим y'_i в G_l^{∞} его выражением из (15). Получим

$$G_l^{\infty} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x'_{j1}(t) + ... + a_{v+w}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x'_{jw}(t) \\ a_0 + a_1\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[x'_{j1}(t)]^2 + ... + a_{v+w}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x'_{jw}(t)x'_{j1}(t) \\ ... \\ a_0 + a_1\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x'_{j1}(t)x'_{jw}(t) + ... + a_{v+w}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[x'_{jw}(t)]^2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Используя (17), можно показать, что матрица D_l при $n \to \infty$ стремится к матрице D_l^{∞}, l-й столбец которой совпадает со столбцом G_l^{∞}.

Заменим элементы столбца G_l^{∞} этой матрицы их линейными комбинациями из (19) и вычислим определитель полученной матрицы. Он равен сумме определителей $v + w + 1$ матриц, получаемых из D_l^{∞} заменой l-го столбца соответственно столбцами

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 \\ ... \\ a_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x'_{j1}(t) \\ a_1\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[x'_{j1}(t)]^2 \\ ... \\ a_1\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x'_{j1}(t)x'_{jw}(t) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_w\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x'_{jw}(t) \\ a_w\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x'_{jw}(t)x'_{j1}(t) \\ ... \\ a_w\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[x'_{jw}(t)]^2 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

В каждом таком определителе элементы l-го столбца, как это видно из (20), имеют общие коэффициенты, соответственно $a_0, a_1, a_2, ..., a_{v+w}$, которые можно вынести за знак определителя. Легко видеть, что в результате получим определители, имеющие по два одинаковых столбца, соответственно: 1-й и l-й, 2-й и l-й, и т.д., и которые поэтому равны нулю, за исключением определителя с коэффициентом a_l. Матрицу этого определителя обозначим D^{∞}. Таким образом, $\det D_l^{\infty} = a_l \det D^{\infty}$.

Можно показать, аналогично тому, как это было показано выше для матрицы D_l, что матрица D^∞ получается как предельная при $n \to \infty$ для матрицы D: $D \to D^\infty$. Следовательно, $$b_l = \frac{\det D_l}{\det D} \to \frac{\det D_l^\infty}{\det D^\infty} = \frac{a_l \det D^\infty}{\det D^\infty} = a_l,\ l = 0,1....,v+w.$$

Теорема доказана.

Можно показать [9], что, если в рассматриваемых моделях, использовать оценки коэффициентов, полученных с помощью МНК, то они будут *смещенными*. В качестве показателя оптимальности модели нами выбрано среднеквадратическое отклонение. С этим показателем смещение оценок никак не связано. Оценки могут быть смещенными, но, если при этом они будут иметь меньшее среднеквадратическое отклонение, то они будут более предпочтительными по сравнению с несмещенными оценками. В связи с чем, останавливаться на рассмотрении смещения оценок коэффициентов моделей мы не будем. Перейдем к вопросу об их состоятельности: сходимости их к истинным значениям. Следующая теорема показывает, что, оценки коэффициентов, полученных с помощью МНК, не будут *состоятельными*. Отсюда вытекает, что как долго бы система ни наблюдалась, методами, основанными на нормальных уравнениях, истинная взаимосвязь параметров системы не может быть найдена.

Теорема 2. *Пусть истинная связь между переменными системы имеет вид:*

$$y' = a_0 + a_1 x'_{j1} + a_2 x'_{j2} + ... + a_w x'_{jw}. \tag{21}$$

а модель, построенная по наблюдениям $y\ (t), x_{j1}(t),..., x_{jw}(t)$ *в моменты времени* $t_1,...,t_n$, *имеет вид:*

$$y'_i = c_0 + c_1 x'_{j1} + c_2 x'_{j2} + ... + c_w x'_{jw}, \tag{22}$$

где коэффициенты $c_0, c_1, c_2,..., c_w$ *определяются из системы нормальных уравнений.*

Пусть $\varepsilon, \delta_{j1}, \delta_{j2},..., \delta_{jw}$ *— случайные возмущения, с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационной матрицей* R, *воздействуют соответственно на переменные* y, $x_{j1}, x_{j2}..., x_{jw}$.

Предположим, что не все элементы вектора Z, *равного произведению вектора* $A^T = (1, -a_1, -a_2,..., -a_w)$ *и матрицы* R, $Z = A^T \cdot R$, *начиная со второго равны нулю.*

Тогда при $n \to \infty$ *модель (22) не стремится к истинной зависимости (21).*

Доказательство. Предположим противное. Пусть при $n \to \infty$ $c_\mu \to a_\mu, v = 0,1,..., w$.

Согласно теореме 1 коэффициенты оптимальной линейной структурной модели также будут стремиться к истинным значениям: $b_\mu \to a_\mu, v = 0,1,..., w$ при $n \to \infty$. Поэтому при $n \to \infty$ будем иметь две системы уравнений: нормальную и структурную, уравнения которых, начиная со второго, будут лишь отличаться соответствующими элементами вектора $Z = A^T \cdot R$. Это легко проверить, записав обе системы уравнений в явном виде, а затем заменить при $n \to \infty$ определяемые коэффициенты в обеих системах коэффициентами $a_\mu, v = 0,1,..., w$. Равенство обеих систем возможно лишь при равенстве нулю элементов вектора Z, начиная со второго. Так как это запрещено условием теоремы, то приходим к противоречию. Поэтому предположение, что $c_\mu \to a_\mu, \nu = 0,1,...,w$, не верно.

Теорема доказана.

Заметим, что условие теоремы: не все элементы вектора Z, начиная со второго равны нулю, всегда выполняется, так как элементы ковариационной матрицы ошибок никак не связаны с коэффициентами искомой зависимости.

Пример. Приведем для наглядности простой пример, показывающий, что теорема 1 не выполняется для моделей, получаемых регрессионными методами, основанными на МНК. Пусть детерминированные переменные Y, X связаны уравнением $Y = bX$ и измеряются в моменты времени $t_1,...,t_n$ соответственно с некоррелированными нормальными стандартными ошибками $\varepsilon(t_i)$, $\delta(t_i)$: $\xi(t_i) = Y(t_i) + \varepsilon(t_i)$, $\eta(t_i) = X(t_i) + \delta(t_i)$.

Пусть по результатам измерений получены следующие модели для $Y = bX$: методом наименьших квадратов: $Y = b'X$, структурным методом: $Y = b''X$.

Покажем, что при $n \to \infty$ оценка b' для b, полученная методом наименьших квадратов, не стремится к b, в то время как оценка b'', полученная структурным методом, стремится к b. Действительно, величина b' находится из нормального уравнения и равна $b' = [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi(t_i)\eta(t_i)][\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi^2(t_i)]^{-1}$. Величина b'' находится из структурного уравнения и равна

$$b'' = [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi(t_i)\eta(t_i)][\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi^2(t_i) - \sigma_\delta^2]^{-1}.$$

При $n \to \infty$: $$b' \to \frac{b\sum_{i=1}^{n}X^2(t_i)}{\sum_{i=1}^{n}X^2(t_i) + \sigma_\delta^2} \neq b,\ b'' \to \frac{b \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X^2(t_i)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X^2(t_i) + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^2} = b.$$

Графики сходимости b' и b'' к $b = 1$ для нормальных стандартных ошибок представлены на рис.2.

5. Индуктивный подход к нахождению оптимальной модели

Существует два основных подхода к построению моделей: дедуктивный и индуктивный [4–5]. Дедуктивный подход применяется, как правило, при моделировании простых и понятных систем. При этом подходе находятся законы, которым подчиняются параметры системы. Он требует глубокого изучения системы, большого уровня знания и большого объема априорной информации. Однако, во многих областях науки, таких как экономика, социология, экология, биология и др. нельзя достичь такого уровня знания. Поэтому при недостаточном объеме информации об изучаемой системе применяют индуктивный подход, при котором на основе некоторой таблицы экспериментальных данных с помощью перебора (последовательного опробования) большого числа моделей находится модель оптимальной сложности. Для нахождения оптимальной структурной модели применен индуктивный подход, аналогичный разработанному А.Г. Ивахненко [4–5], в котором в отличие от [4–5], не проводится многорядная селекция моделей и не используется полный перебор моделей. Алгоритм такого индуктивного нахождения модели приведен на рис. 2. Использование в этом алгоритме статистического метода нахождения наилучшего множества переменных путем построения бассейна позволяет резко сократить перебор моделей, поскольку отпадает необходимость перебора всего множества моделей данного порядка. В рассматриваемом индуктивном алгоритме применяется следующее правило останова перебора моделей: если изменение характеристики качества модели при переходе к модели более высокого порядка (например, уменьшение среднеквадратической ошибки или увеличение множественного коэффициента корреляции) меньше определенного числа (порога), то выбирается модель предыдущего порядка. В алгоритме, приведенном на рис. 3, характеристикой качества модели k-го порядка является среднеквадратическая ошибка. Аналогично строится индуктивный алгоритм, в котором характеристикой качества модели *k*-го порядка является множественный коэффициент корреляции $C_i(k)$. В этих алгоритмах при $k=0$ оптимальная структурная модель имеет вид:

$$y_i' = b_0 = \bar{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_i(t),$$

при этом $CKO(0)$ равно дисперсии y_i, а $C_i(0)=0$.

6. Пример

В области экономики структурным методом была получена модель зависимости изменения индекса потребительских цен (ИПЦ), определяющего инфляцию, от других экономических показателей. Для построения модели учитывались ежемесячные данные экономики России за период с 1991 г. по 2000 г. Поскольку какая-либо информация об ошибках данных отсутствовала, то исходная корреляционная матрица R бралась нулевой. Исходное множество переменных, по которым строилась модель, составило 47 экономических показателей. В качестве характеристики качества модели была выбрана среднеквадратическая ошибка. Получены следующие модели инфляции:

1) по бассейну 1-го порядка:

$$Y = \text{-}44{,}19097 + 0{,}2649895X_1 + 0{,}2551773X_2 + 0{,}0006571X_3 +$$
$$-0{,}698345X_4 + 3{,}0933376X_5 - 0{,}000506X_6 + 12{,}175218X_7 - 1{,}092033\,X_8 +$$
$$+0{,}4188977{*}X_9 + 1{,}0048869\,X_{10} - 0{,}00029\,X_{11}, \quad CKO_1 = 1{,}547851096.$$

2) по бассейну 2-го порядка:

$$Y = 32{,}203661 + 0{,}1367816X_1 + 0{,}1325215X_2 + 0{,}00042X_3 -$$
$$-0{,}25452X_4 + 48{,}755581(X_7)^2 + 3{,}0666544X_5 - 0{,}000506X_6 - 43{,}39034X_7 -$$
$$-0{,}189812\,(X_8)^2 + 0{,}1337071X_{12} + 0{,}0001067X_{13} + 0{,}0001241X_{14}.$$
$$CKO_2 = 1{,}1876927.$$

Для сравнения бралась модель инфляции, построенная по методу МГУА:

$$Y = 46.876\text{-}0.93151X_8 + 1.8488X_5 \text{ - } 0.41321X_4 +$$
$$+ 4.6458e\text{-}005X_{15} + 0.00050847X_{11} + 0.30488X_1 + 0.1493X_{12}.$$
$$CKO = 3.0323.$$

Здесь: Y – уровень инфляции (индекс потребительских цен — ИПЦ), X_1 – уровень инфляции в прошлом месяце, X_2 – минимальная заработная плата, X_3 – расходы на потребление, X_4 – расходы на потребление в ценах декабря 1990 г., X_5 – обменный курс национальной денежной единицы, X_6 – индивидуальный налог, X_7 – зарегистрированные вакансии, X_8 – баланс бюджета, X_9 – общая розничная продажа в постоянных ценах, X_{10} – безработица, X_{11} – общая розничная продажа в текущих ценах, X_{12} – уровень инфляции четырьмя месяцами ранее, X_{13} – денежные агрегаты, X_{14} – рост финансового капитала, X_{15} – покупка валюты.

Уменьшение среднеквадратической ошибки при переходе к структурной модели второго порядка составило 3,6%. В наилучшую модель вошло 11 переменных бассейна первого порядка.

Построенные модели были использована для прогноза инфляции на следующие 4 месяца. На рис.4 представлены графики прогноза инфляции (ИПЦ) на 4 месяца по методу МГУА и структурному методу. Расхождение прогнозируемой инфляции, вычисленной обеими методами, с реально наблюдаемой инфляцией в эти месяцы, подтверждает правильность построенных обеих моделей. На рис. 5 и 6 представлены графики значений реального и прогнозируемого ИПЦ по структурной модели и МГУА, которые также подтверждают хорошее их совпадение для обеих методов.

Заключение

Таким образом, в статье получены теоретические и практические результаты по моделированию сложных систем, которые функционируют в условиях искажающего влияния возмущающих факторов на параметры системы. Разработан метод индуктивного нахождения оптимальных структурных моделей, адекватно описывающих закономерности функционирования сложных систем. Проведен сравнительный анализ структурного метода с известными методами построения моделей. Показана его эффективность при решении реальных практических задач.

АННОТАЦИЯ

Изучается структурный метод построения моделей сложных систем, основанный, как и МГУА, на индуктивном подходе. Основное внимание уделяется моделям, аргументы которых подвержены случайным возмущениям с известными корреляционными матрицами.

АНОТАЦІЯ

Вивчається структурний метод побудови моделей складних систем, який базується, як і МГУА, на індуктивному підході. Основна увага приділяється моделям, аргументи яких зазнають впливу випадкових збурень з відомими кореляційними матрицями.

ABSTRACT

The structural method of construction of models of complicated systems based, as well as GMDH, on the inductive approach is studied. The main attention is given to models, which arguments are subject to random disturbances with known correlation matrixes.

Литература

1. Коваль В.Н. Прикладные системы анализа многомерных процессов.– Киев: Наук. думка, 2002.– 496с.
2. В.Н. Коваль, Ю.В. Кук. Индуктивный поиск закономерностей в многопараметрических системах. // Міжнародна конференція з індуктивного моделювання МКІМ—2002. – Львів: Державний НДІ інформаційної інфраструктури, 2002. Т.1, ч. 2. С. 55–61.
3. Koval V.N., Kuk Ju. V. Finding Unknown Rules of an Environment by Intelligent Goal-Oriented Systems. International Journal. “Information Theories & Applications”, Vol.7, N3, p. 127-138, Sofia, FOA-COMMRS, 2001.
4. Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. – Киев : Наук. Думка, 1982. – 296 с.
5. Ивахненко А.Г., Степашко В.С. Помехоустойчивость моделирования. - Киев : Наук. Думка, 1984. – с. 295.
6. Степашко В.С. Основи теорії МГУА як методу індуктивного моделювання. //Міжнародна конференція з індуктивного моделювання. – Львів: Державний НДІ інформаційної інфраструктури, 2002. Т.1, ч. 1. С. 16–23.
7. И. Вучков, Л. Бояджиева, Е. Солаков. Прикладной линейный регрессионный анализ. Пер. с болг. – М.: Финансы и статистика, 1987. — 239с.
8. Neyman J. and Scott E.L. On certain methods of estimating the linear structural relation. Ann. Math. Statist., 22, 1951, 352.
9. Т. Андерсон. Введение в многомерный статистический анализ. Пер.с англ. – М.: Физматгиз, 1963. – 500 с.

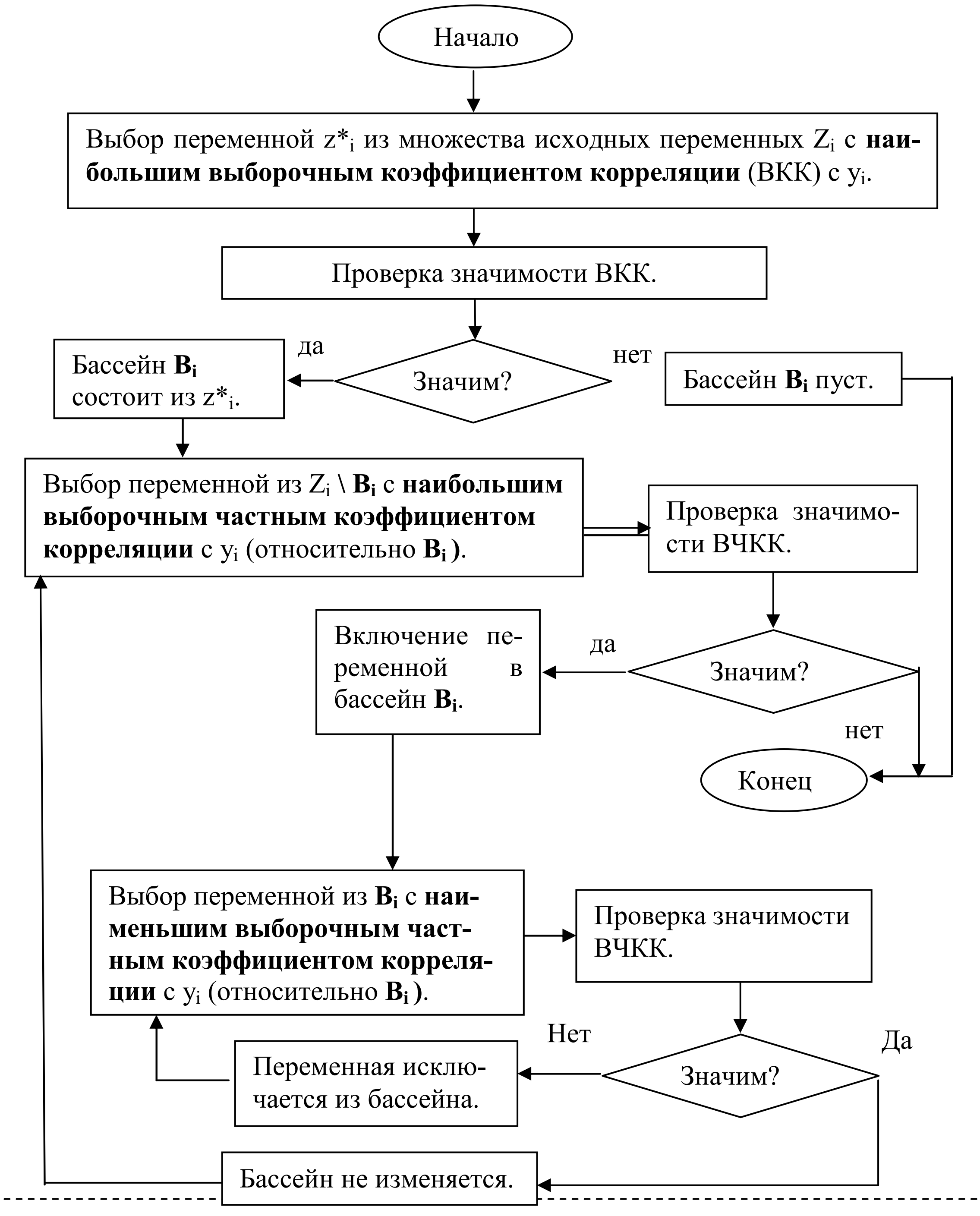
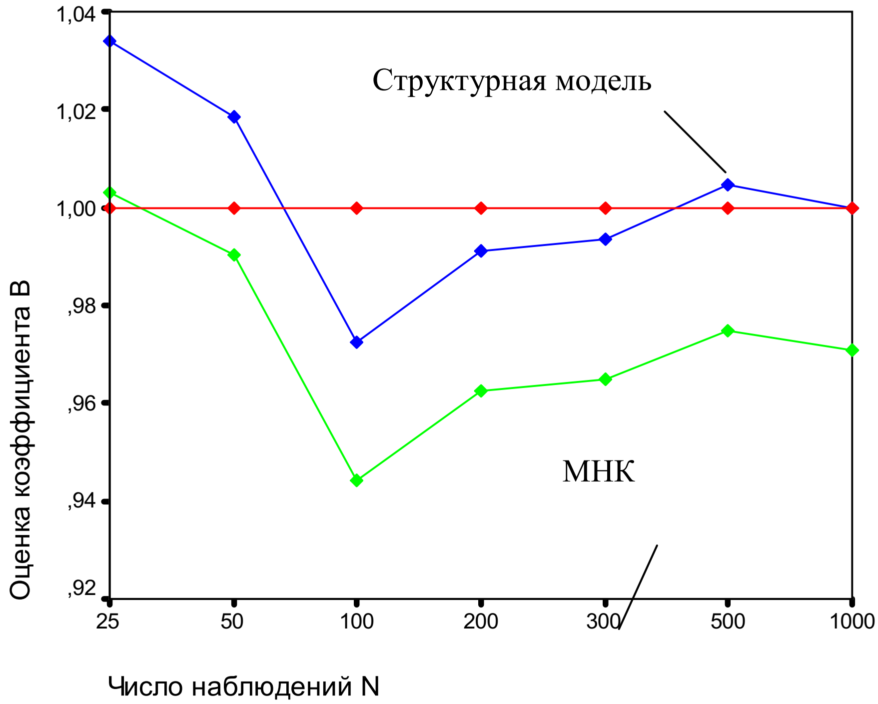


Рис.1. Алгоритм построения бассейна

Рис.2. Асимптотическое поведение коэффициентов
b'' (структурной модели) и b' (модели, полученной МНК) при $b = 1$.



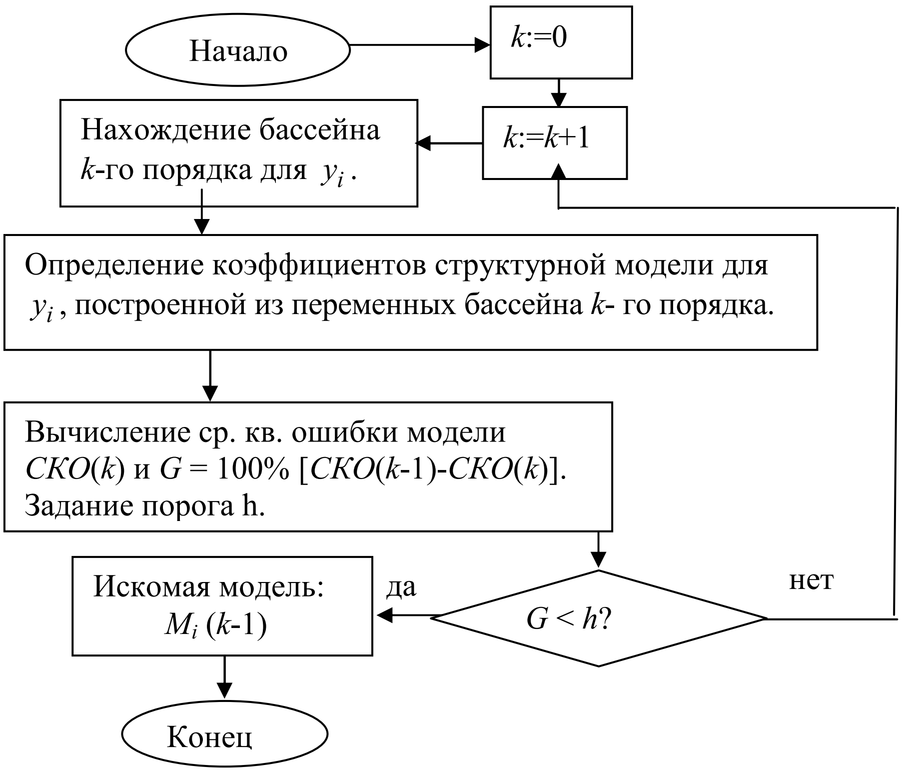
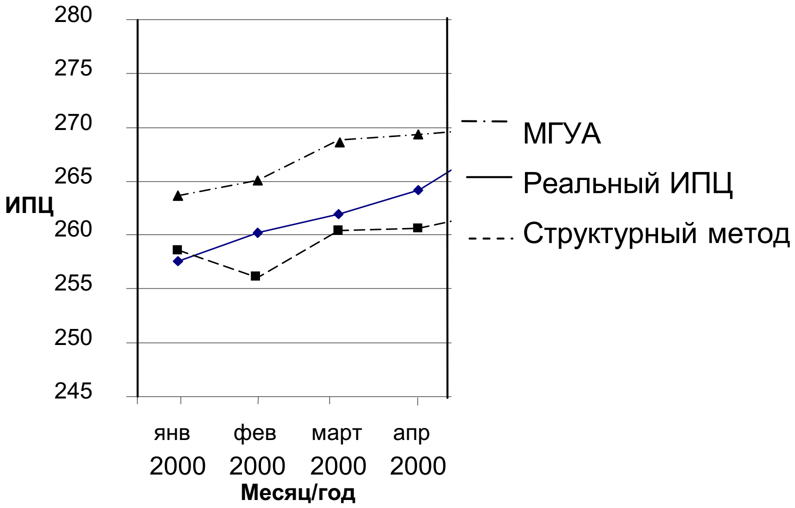


Рис.3 Индуктивный алгоритм нахождения оптимальной структурной модели.

Рис.4. Прогноз инфляции (ИПЦ) на четыре месяца.



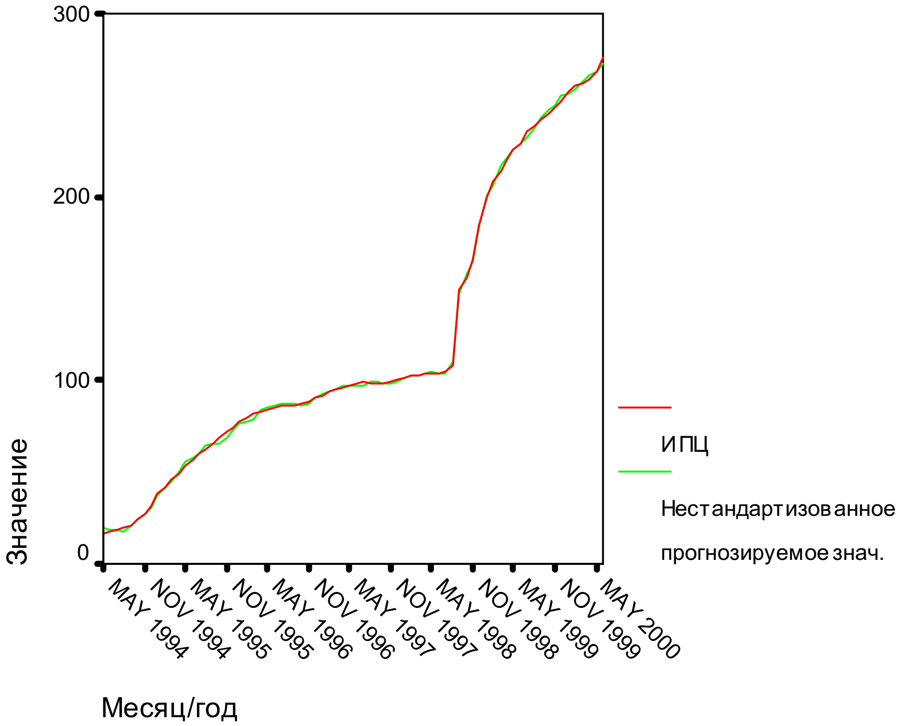


Рис.5. График значений реального и прогнозируемого индекса потребительских цен (структурная модель).

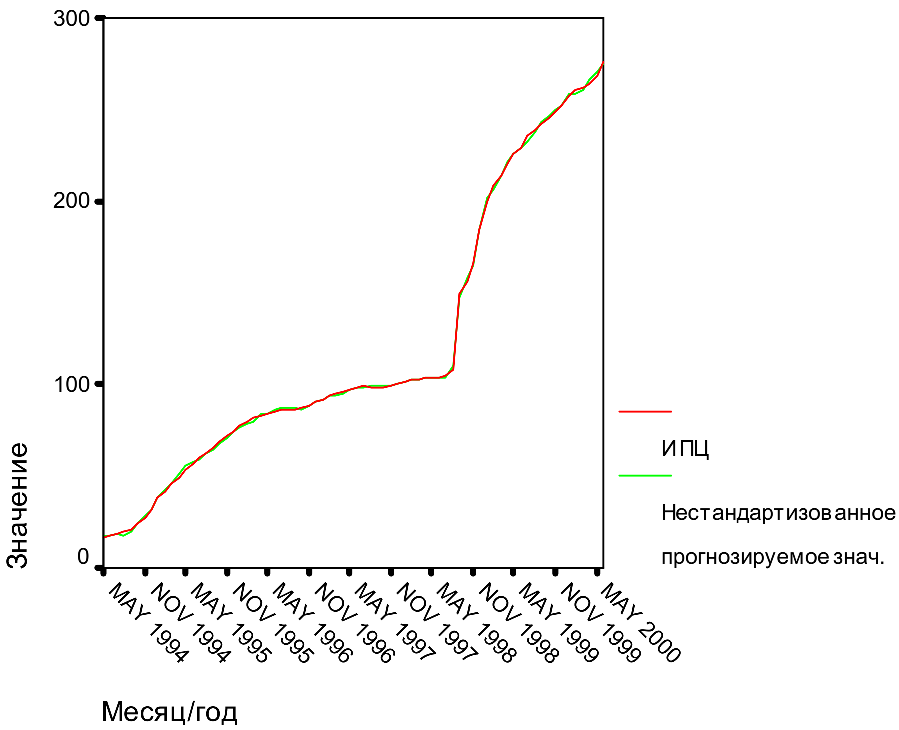


Рис.6. График значений реального и прогнозируемого индекса потребительских цен (модель МГУА).